SULLE



FORME TERNARIE QUADRATICHE

MEMORIA PRIMA

DI

GIUSEPPE BATTAGLINI

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
Pignatelli a san Giovanni maggiore
1867

Memoria estratta dal Vol. III. degli Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche



Oggetto di questa Memoria è la rappresentazione geometrica delle forme ternarie quadratiche.

1. *Preliminari.* Siano (s_1, s_2, s_3) ed (S_1, S_2, S_3) due sistemi di variabili; attribuendo ai rapporti $s_1 : s_2 : s_3$ o $S_1 : S_2 : S_3$ tutt'i valori possibili, diremo che il loro insieme costituisce un *sistema ternario*. *Rappresentazione* del sistema ternario è il concetto del *continuo* nel quale si pongono le *determinazioni* $s_1 : s_2 : s_3$ o $S_1 : S_2 : S_3$; diremo che a tali determinazioni corrisponde nel continuo un *elemento* s o S, che ha per *coordinate* (s_1, s_2, s_3) o (S_1, S_2, S_3).

Ponendo tra le coordinate di s o di S la relazione

$$s_1 S_1 + s_2 S_2 + s_3 S_3 = 0 , \tag{1}$$

se in questa equazione si riguardano costanti (S_1, S_2, S_3) e variabili (s_1, s_2, s_3), o pure costanti (s_1, s_2, s_3) e variabili (S_1, S_2, S_3), tutti gli elementi corrispondenti s o S del continuo si diranno *appartenere* all'elemento fisso S o s; questo elemento fisso sarà *determinato* dall'equazione (1) tra le variabili (s_1, s_2, s_3) o (S_1, S_2, S_3).

Se gli elementi S ed s sono determinati dall'equazioni

$$\Sigma_1 s_1 + \Sigma_2 s_2 + \Sigma_3 s_3 = 0 , \qquad \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_3 = 0 ,$$

le loro coordinate saranno date dalle formole

$$\frac{S_1}{\Sigma_1}=\frac{S_2}{\Sigma_2}=\frac{S_3}{\Sigma_3}=\frac{1}{K}\,,\qquad \frac{s_1}{\sigma_1}=\frac{s_2}{\sigma_2}=\frac{s_3}{\sigma_3}=\frac{1}{k}\,,$$

essendo K e k quantità arbitrarie.

Se (s', s'') o pure (S', S'') è una *coppia* di elementi appartenenti ad S o ad s, si potrà supporre

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} \Sigma_1=s'_2 s''_3-s'_3 s''_2\,, & \Sigma_2=s'_3 s''_1-s'_1 s''_3\,, & \Sigma_3=s'_1 s''_2-s'_2 s''_1 \\ \sigma_1=S'_2 S''_3-S'_3 S''_2\,, & \sigma_2=S'_3 S''_1-S'_1 S''_3\,, & \sigma_3=S'_1 S''_2-S'_2 S''_1\,. \end{array}$$

Le coppie (s', s'') ed (S', S'') determinano gli elementi S ed s cui esse appartengono; indicheremo questi elementi con $s's''$ ed $S'S''$. Essendo dati tre elementi (s', s'', s''') o (S', S'', S'''), essi considerati a due a due determinano i tre elementi $(s''s''', s'''s', s's'')$ o $(S''S''', S'''S', S'S'')$; indicandoli rispettivamente con (S', S'', S''') o (s', s'', s'''), diremo che gli elementi (s', s'', s''') ed (S', S'', S''') costituiscono una *terna* $(s's''s''', S'S''S''')$ di elementi s ed S del sistema.

Essendo $(s's''s''', S'S''S''')$ una terna arbitraria di elementi s ed S, si diranno *potenze* di questa terna di elementi s o S le espressioni

$$(3)\qquad P.s's''s'''=\begin{vmatrix} s'_1\,, & s'_2\,, & s'_3 \\ s''_1\,, & s''_2\,, & s''_3 \\ s'''_1\,, & s'''_2\,, & s'''_3 \end{vmatrix}\,,\qquad p.S'S''S'''=\begin{vmatrix} S'_1\,, & S'_2\,, & S'_3 \\ S''_1\,, & S''_2\,, & S''_3 \\ S'''_1\,, & S'''_2\,, & S'''_3 \end{vmatrix}\,.$$

Allorchè (s', s'', s''') o pure (S', S'', S''') appartengono ad uno stesso elemento S o s, sarà

$$P.s's''s'''=0\,,\qquad \text{o puro}\qquad p.S'S''S'''=0\,.$$

Indicando con S o s l'elemento $s's''$ o $S'S'$, si avrà

$$(4)\qquad \begin{array}{l} P.ss's''=K\,P.sS=K(s_1S_1+s_2S_2+s_3S_3)\,, \\ p.SS'S''=k.p.Ss=k\,(S_1s_1+S_2s_2+S_3s_3)\,; \end{array}$$

l'espressione $P.sS$ o $p.Ss$ si dirà *potenza* della coppia di elementi (s, S) o (S, s).

Ponendo, per $i = 1, 2, 3$,

$$s_i = \sigma' s'_i + \sigma'' s''_i + \sigma''' s'''_i, \qquad S_i = \Sigma' S'_i + \Sigma'' S''_i + \Sigma''' S'''_i,$$

si avrà

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sigma' &= \frac{P.ss''s'''}{P.s's''s'''}, \quad \sigma'' = \frac{P.ss'''s'}{P.s''s'''s'}, \quad \sigma''' = \frac{P.ss's''}{P.s'''s's''}, \\ \Sigma' &= \frac{p.SS''S'''}{p.S'S''S'''}, \quad \Sigma'' = \frac{p.SS'''S'}{p.S''S'''S'}, \quad \Sigma''' = \frac{p.SS'S''}{p.S'''S'S''}; \end{aligned}$$

le quantità $(\sigma', \sigma'', \sigma''')$, o $(\Sigma', \Sigma'', \Sigma''')$ si diranno le *coordinate di* s *o di* S *rispetto alla terna* $(s's''s''', S'S''S''')$, e si diranno $\sigma' : \sigma'' : \sigma'''$, o $\Sigma' : \Sigma'' : \Sigma'''$, i *rapporti* di s o di S rispetto alla medesima terna.

La terna rispetto alla quale si ha

$$\sigma' = s_1, \quad \sigma'' = s_2, \quad \sigma''' = s_3; \qquad \Sigma' = S_1, \quad \Sigma'' = S_2, \quad \Sigma''' = S_3,$$

è la terna *fondamentale* del sistema.

Ponendo, per $i = 1, 2, 3$,

$$s_i = \sigma' s'_i + \sigma'' s''_i, \qquad S_i = \Sigma' S'_i + \Sigma'' S''_i,$$

ed indicando con s''' o S''' un elemento arbitrario, sarà

$$(6) \qquad \sigma' = \frac{P.ss''s'''}{P.s's''s'''}, \quad \sigma'' = \frac{P.ss's'''}{P.s''s's'''}; \qquad \Sigma' = \frac{p.SS''S'''}{p.S'S''S'''}, \quad \Sigma'' = \frac{p.SS'S'''}{p.S''S'S'''};$$

le quantità (σ', σ''), o (Σ', Σ'') si diranno le *coordinate di* s *o di* S (elemento appartenente ad $s's''$ o ad $S'S''$) *rispetto alla coppia* (s', s'') *o* (S', S''). Osservando che le espressioni (6) debbono essere indipendenti da s''' ed S''', potremo dare ad esse la forma

$$(6) \qquad \sigma' = \frac{P.ss''}{P.s's''}, \quad \sigma'' = \frac{P.ss'}{P.s''s'}; \qquad \Sigma' = \frac{p.SS''}{p.S'S''}, \quad \Sigma'' = \frac{p.SS'}{p.S''S'},$$

in cui le quantità affette dai simboli P e p, relativi ad una coppia di elementi, sono formate con le sole coordinate di quegli elementi. Daremo in seguito le espressioni di $P.s's''$ e di $p.S'S''$; per ora le dinoteremo semplicemente col nome di *potenze* delle coppie (s', s'') ed (S', S'').

La quantità

$$(7) \qquad \frac{\sigma''}{\sigma'}=\frac{P.s's}{P.ss''}, \quad \text{o} \quad \frac{\Sigma''}{\Sigma'}=\frac{p.S'S}{p.SS''},$$

si dirà il *rapporto* di s o di S rispetto alla coppia (s', s'') o (S', S''). Se α, β, γ, δ sono i rapporti di quattro elementi a, b, c, d appartenenti ad $s's''$ rispetto alla coppia (s', s''), o pure sono i rapporti di quattro elementi A, B, C, D appartenenti ad $S'S''$ rispetto alla coppia (S', S''), si troverà

$$(8) \qquad \frac{P.ac}{P.cb}:\frac{P.ad}{P.db}=\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}:\frac{\alpha-\delta}{\delta-\beta}; \quad \frac{p.AC}{p.CB}:\frac{p.AD}{p.DB}=\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}:\frac{\alpha-\delta}{\delta-\beta};$$

la prima o la seconda di queste espressioni si dirà il *rapporto anarmonico* delle due coppie (a, b), (c, d), o (A, B), (C, D).

Allorchè il rapporto anarmonico di due coppie ha il valore -1, le due coppie si diranno in *rapporto armonico*, o pure *coniugate armoniche tra loro*. La coppia di elementi (x, y) o (X, Y) per la quale si ha

$$x_i=\sigma' s'_i+\sigma'' s''_i; \qquad X_i=\Sigma' S'_i+\Sigma'' S''_i,$$
$$\text{o pure}$$
$$y_i=\sigma' s'_i-\sigma'' s''_i; \qquad Y_i=\Sigma' S'_i-\Sigma'' S''_i,$$

è coniugata armonica rispetto ad (s', s'') o ad (S', S''); variando i rapporti $\sigma':\sigma''$ o $\Sigma':\Sigma''$, le coppie (x, y) o (X, Y) si diranno costituire un'*involuzione*, che ha per *elementi doppii* (s', s'') o (S', S'').

Se due elementi x, y, o pure due elementi X, Y sono determinati rispetto a due coppie diverse di elementi (s', s'') o (S', S'') dagli stessi valori dei rapporti $\sigma':\sigma''$, o $\Sigma':\Sigma''$, variando tali rapporti quegli elementi x, y o X, Y si diranno costituire *serie equianarmoniche* di elementi appartenenti ad $s's''$ o ad $S'S''$. In due serie equianarmoniche, il rapporto anarmonico di due coppie di elementi x o X appartenenti ad una serie è eguale al rapporto anarmonico delle coppie corrispondenti di elementi y o Y appartenenti all'altra serie.

2. *Forme quadratiche congiunte.* Siano le forme quadratiche ternarie, o più brevemente le *quadriche* ternarie, U ed u, rispetto alle coordinate s_i o S_i di un elemento s o S, espresse da

$$(1) \qquad \begin{aligned} U&=A_{11}s_1^2+A_{22}s_2^2+A_{33}s_3^2+2(A_{23}s_2s_3+A_{31}s_3s_1+A_{12}s_1s_2),\\ u&=a_{11}S_1^2+a_{22}S_2^2+a_{33}S_3^2+2(a_{23}S_2S_3+a_{31}S_3S_1+a_{12}S_1S_2),\end{aligned}$$

o brevemente da

$$U=\Sigma A_{ij}s_i s_j\,, \qquad \text{ed} \qquad u=\Sigma a_{ij}S_i S_j\,,$$

essendo $i, j=1, 2, 3$, $A_{ij}=A_{ji}$, $a_{ij}=a_{ji}$, o finalmente, adoperando la votazione *ombrale*, da

$$(1) \qquad U=(A_1 s_1+A_2 s_2+A_3 s_3)^2\,, \qquad u=(a_1 S_1+a_2 S_2+a_3 S_3)^2\,,$$

intendendo che dopo lo sviluppo del quadrato le combinazioni $A_i A_j$, $a_i a_j$ delle *ombre* di quantità A ed a si cambiino in A_{ij} ed a_{ij}.

Tutti gli elementi s o S che con le loro coordinate s_i o S_i verificano l'equazione $U=0$, o $u=0$, costituiranno un *sistema ternario quadratico* di elementi s o S; quegli elementi s o S si diranno *appartenere* ad U o ad u.

Si ponga

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\frac{dU}{ds_i}=U_i=(A_1 s_1+A_2 s_2+A_3 s_3)A_i\ ; \quad \frac{1}{2}\frac{du}{dS_i} \quad u_i=(a_1 S_1+a_2 S_2+a_3 S_3)a_i\,,$$

sarà

$$(3) \qquad U=U_1 s_1+U_2 s_2+U_3 s_3\,, \qquad u=u_1 S_1+u_2 S_2+u_3 S_3\,,$$

sicchè ponendo

$$(4) \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13} \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23} \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33} \end{vmatrix}, \qquad \delta=\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & a_{13} \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & a_{23} \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33} \end{vmatrix},$$

verrà

$$(5) \quad -U\Delta=\begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13}\,, & U_1 \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23}\,, & U_2 \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33}\,, & U_3 \\ U_1\,, & U_2\,, & U_3\,, & 0 \end{vmatrix}, \quad -u\delta=\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & a_{13}\,, & u_1 \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & a_{23}\,, & u_2 \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33}\,, & u_3 \\ u_1\,, & u_2\,, & u_3\,, & 0 \end{vmatrix}.$$

Il determinante Δ o δ si dice il *discriminante* di U o di u.

L'elemento della forma U o u infinitamente *vicino* al suo elemento s o S (vale a dire corrispondente a coordinate s_i o S_i infinitamente poco diverse da quelle di s o di S) determina con s o S un elemento S o s, che si dirà *congiunto* ad U o ad u in s o in S. Tra gli elementi S ed s

congiunti rispetto ad U, o pure tra gli elementi s ed S congiunti rispetto ad u, si avranno le relazioni

$$(6)\qquad \frac{U_1}{S_1}=\frac{U_2}{S_2}=\frac{U_3}{S_3}\,,\quad \text{o pure}\quad \frac{u_1}{s_1}=\frac{u_2}{s_2}=\frac{u_3}{s_3}\,,$$
$$S_1 s_1+S_2 s_2+S_3 s_3=0\,,\qquad s_1 S_1+s_2 S_2+s_3 S_3=0\,,$$

sicchè ponendo

$$(7)\qquad -\varphi=\begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13}\,, & S_1 \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23}\,, & S_2 \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33}\,, & S_3 \\ S_1\,, & S_2\,, & S_3\,, & 0 \end{vmatrix}\,,\qquad -\Phi=\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & a_{13}\,, & s_1 \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & a_{23}\,, & s_2 \\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33}\,, & s_3 \\ s_1\,, & s_2\,, & s_3\,, & 0 \end{vmatrix}$$

tutti gli elementi S congiunti ad U, o pure tutti gli elementi s congiunti ad u, apparterranno alla quadrica ternaria φ o Φ.

Se a_{ik} è il determinante minore complementare dell'elemento A_{ik} di Δ, o pure se A_{ik} è il determinante minore complementare dell'elemento a_{ik} di δ, le forme φ e Φ saranno identiche ad u ed U; in tal caso U ed u si diranno *forme congiunte tra loro*, e determineranno un sistema (U, u) di elementi s ed S tra loro rispettivamente congiunti.

Se la forma u è congiunta ad U, o Φ è congiunta ad u, sarà $\Phi=\Delta U$; similmente se la forma U è congiunta ad u, e φ è congiunta ad U, sarà $\varphi=\delta u$. Fra i discriminanti Δ e δ delle forme congiunte U ed u si ha la relazione $\delta=\Delta^2$, o pure $\Delta=\delta^2$, secondo che si riguarda u come forma congiunta di U, o puro U come forma congiunta di u.

3. *Casi speciali della forma quadratica.* Supponiamo che la forma ternaria U si possa esprimere come forma binaria delle due variabili Σ', Σ'', funzioni lineari di s_1, s_2, s_3, vale a dire che si abbia identicamente, in notazione ombrale,

$$(1)\qquad U=(\alpha_1\Sigma'+\alpha_2\Sigma'')^2\,,$$

essendo

$$\Sigma'=A'_1 s_1+A'_2 s_2+A'_3 s_3\,,\qquad \Sigma''=A''_1 s_1+A''_2 s_2+A''_3 s_3\,,$$

e sia u la forma congiunta ad U. Si avrà identicamente

$$U_i=(\alpha_1 A'_i+\alpha_2 A''_i)(\alpha_1\Sigma'+\alpha_2\Sigma'')\,,$$

sicchè i valori delle s_i che annullano simultaneamente Σ' e Σ'' verificheranno l'equazioni

$$(2) \qquad U_1=0\,, \qquad U_2=0\,, \qquad U_3=0\,,$$

da cui si deduce $\Delta=0$; adunque affinchè la forma U possa esprimersi *linearmente* con due sole variabili dovrà annullarsi il suo discriminante. Allorchè questa condizione è soddisfatta, gli elementi di U apparterranno ad una *coppia di elementi* (X, Y); i rapporti tra le coordinate dell'elemento s *comune* ad X ed Y saranno dati da uno qualunque dei tre sistemi di equazioni espressi, col cangiamento dell'indice i, da

$$(3) \qquad \frac{s_1}{a_{i1}}=\frac{s_2}{a_{i2}}=\frac{s_3}{a_{i3}}\;;$$

in tal caso tra U_1, U_2, U_3 si ha una relazione lineare espressa da una qualunque delle tre equazioni racchiuse in

$$(4) \qquad a_{i1}U_1+a_{i2}U_2+a_{i3}U_3=0\,.$$

Indicando con Ω il determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13}\,, & U_1 \\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23}\,, & U_2 \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33}\,, & U_3 \\ U_1\,, & U_2\,, & U_3\,, & 0 \end{vmatrix},$$

e con Ω_{ij} il suo determinante minore complementare dell'elemento A_{ij}, si avrà in generale (per l'equazione (5) del numero precedente) $a_{ij}U=\Delta s_i s_j-\Omega_{ij}$, e per $\Delta=0$, $a_{ij}U=-\Omega_{ij}$; supponendo quindi $i=j$ si avranno le equazioni

$$(5) \qquad a_{11}U=-\Omega_{11}\,, \qquad a_{22}U=-\Omega_{22}\,, \qquad a_{33}U=-\Omega_{33}\,,$$

le quali esprimono U per mezzo di due qualunque fra le tre funzioni lineari U_i delle variabili s_i.

Essendo a_{ij} l'elemento reciproco di A_{ij} nel determinante Δ, sarà in generale

$$a_{ih}a_{jk}-a_{ik}a_{jh}=\Delta\,Comp.(A_{ih}A_{jk}-A_{ik}A_{jh})\,,$$

e per $\Delta=0$, $a_{ii}\,a_{kk}=a_{ik}\,a_{ki}$; la forma u congiunta ad U verrà quindi espressa da una qualunque delle tre equazioni racchiuse in

$$(6)\qquad a_{ii}\,u=(a_{i1}S_1+a_{i2}S_2+a_{i3}S_3)^2\,,$$

sicchè in tal caso ogni elemento S appartenente all'elemento s determinato dall'equazione (3) potrà considerarsi come congiunto ad U.

Supponiamo ora che la forma ternaria U si possa esprimere con una sola variabile Σ, funzione lineare di s_1, s_2, s_3, vale a dire che si abbia identicamente, in notazione ordinaria,

$$(7)\qquad U=\Sigma^2=(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)^2\,;$$

sarà $U_i=A_i\Sigma$, sicchè tutt'i sistemi di valori delle s_i che annullano Σ annulleranno anche U_1, U_2, U_3; le equazioni (2) dovranno quindi ridursi ad una sola, o sarà perciò $a_{ij}=0$; adunque affinchè la forma U possa esprimersi *linearmente* con una sola variabile dovranno annullarsi gli elementi reciproci degli elementi del suo discriminante. Allorchè queste condizioni sono soddisfatte, gli elementi di U apparterranno ad una *coppia di elementi S tra loro coincidenti*; in tal caso tra U_1, U_2, U_3 si hanno due relazioni lineari, espresse da uno qualunque dei tre sistemi di equazioni racchiuse in

$$(8)\qquad \frac{U_1}{A_{i1}}=\frac{U_2}{A_{i2}}=\frac{U_3}{A_{i3}}\,.$$

U prenderà una qualunque delle tre forme

$$(9)\qquad A_{11}U=U_1^2\,,\qquad A_{22}U=U_2^2\,,\qquad A_{33}U=U_3^2\,,$$

e la forma u congiunta ad U sarà nulla identicamente.

Un'analoga discussione potrà istituirsi sulla forma ternaria u, e basterà mutare nelle formole precedenti le lettere majuscole in minuscole, e viceversa. La forma u potrà esprimersi *linearmente* con due sole variabili, o con una sola variabile, secondo che si ha $\delta=0$, o pure $A_{ij}=0$; nel primo caso gli elementi di u apparterranno ad una *coppia di elementi* (x, y), e nel secondo apparterranno ad una *coppia di elementi* s *tra loro coincidenti*.

4. *Elementi armonici rispetto ad una forma quadratica*. Siano le qua-

driche congiunte (U, u), espresse in notazione ombrale da

$$(1) \qquad U=(A_1 s_1+A_2 s_2+A_3 s_3)^2 , \qquad u=(a_1 S_1+a_2 S_2+a_3 S_3)^2 .$$

Ponendo

$$\tfrac{1}{2}\frac{dU}{ds_i}=U_i , \qquad \tfrac{1}{2}\frac{du}{dS_i}=u_i ,$$

$$s''_1\frac{d}{ds_1}+s''_2\frac{d}{ds_2}+s''_3\frac{d}{ds_3}=\Theta'' , \qquad S''_1\frac{d}{dS_1}+S''_2\frac{d}{dS_2}+S''_3\frac{d}{dS_3}=\theta''$$

sarà

$$U=U_1 s_1+U_2 s_2+U_3 s_3=\tfrac{1}{2}\,\Theta U=\tfrac{1}{2}\,\Theta^2 U ,$$

$$u=u_1 S_1+u_2 S_2+u_3 S_3=\tfrac{1}{2}\,\theta u=\tfrac{1}{2}\,\theta^2 u .$$

Se nell'equazioni $U=0$ ed $u=0$ si pongano per s_i ed S_i le espressioni

$$s_i=\sigma' s'_i+\sigma'' s''_i , \qquad S_i=\Sigma' S'_i+\Sigma'' S''_i ,$$

si avrà

$$(2) \qquad \begin{gathered} \Theta'^2 U \sigma'^2+2\Theta'\Theta'' U \sigma'\sigma''+\Theta''^2 U \sigma''^2=0 , \\ \theta'^2 u \Sigma'^2+2\theta'\theta'' u \Sigma'\Sigma''+\theta''^2 u \Sigma''^2=0 . \end{gathered}$$

I valori di $\sigma'':\sigma'$, o pure di $\Sigma'':\Sigma'$, ricavati dall'equazioni (2) sono i due rapporti $\frac{P.s's}{P.ss''}$ dei due elementi s comuni alla quadrica U e ad $s's''$ rispetto alla coppia (s', s''), o pure sono i due rapporti $\frac{p.S'S}{p.SS''}$ dei due elementi S comuni alla quadrica u e ad $S'S''$ rispetto alla coppia (S', S''). Allorchè $\Theta'\Theta'' U=0$, o pure $\theta'\theta'' u=0$, la coppia di quei due elementi s è coniugata armonica rispetto ad (s', s''), o pure la coppia di quei due elementi S è coniugata armonica rispetto ad (S', S''); adunque tutti gli elementi s coniugati armonici di s' rispetto alle coppie di elementi comuni ad U ed $s's$ (o più brevemente *coniugati armonici di* s' *rispetto ad* U) apparterranno alla forma lineare $\Theta\Theta' U$ espressa da

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}\Theta\Theta' U=U'_1 s_1+U'_2 s_2+U'_3 s_3=U_1 s'_1+U_2 s'_2+U_3 s'_3=\tfrac{1}{2}\,\Theta' U ,$$

e tutti gli elementi S coniugati armonici di S' rispetto alle coppie di elementi comuni ad u ed $S'S$ (o più brevemente *coniugati armonici di* S' *rispetto ad* u) apparterranno alla forma lineare $\theta\theta' u$ espressa da

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}\theta\theta' u=u'_1 S_1+u'_2 S_2+u'_3 S_3=u_1 S'_1+u_2 S'_2+u_3 S'_3=\tfrac{1}{2}\,\theta' u .$$

L'elemento S o s determinato dall'equazione $\Theta\Theta' U = 0$, o $\theta\theta' u = 0$, si dirà *armonico* di s' o di S' rispetto ad U o ad u. In notazione ombrale, questo elemento S o s è determinato dall'una o dall'altra delle equazioni

$$(A_1 s'_1 + A_2 s'_2 + A_3 s'_3)(A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_3 s_3) = 0\,, \quad (a_1 S'_1 + a_2 S'_2 + a_3 S'_3)(a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3) = 0\,.$$

La condizione poi affinchè gli elementi (s', s'') o pure (S', S''), siano coniugati armonici rispetto ad U o ad u è espressa dall'una o dall'altra delle equazioni

$$(A_1 s'_1 + A_2 s'_2 + A_3 s'_3)(A_1 s''_1 + A_2 s''_2 + A_3 s''_3) = 0\,, \quad (a_1 S'_1 + a_2 S'_2 + a_3 S'_3)(a_1 S''_1 + a_2 S''_2 + a_3 S''_3) = 0\,.$$

Le forme $\Theta\Theta' U$ e $\theta\theta' u$ sono quei covarianti detti *emananti puri* di U ed u rispetto ad s' ed S'; le forme $\Theta'\Theta'' U$ e $\theta'\theta'' u$ sono poi gli *emananti misti* di U ed u rispetto ad (s', s'') ed (S', S'').

Se s' appartiene ad U, ed S' appartiene ad u (onde le condizioni $\Theta'^2 U = 0$, e $\theta'^2 u = 0$) l'equazioni $\Theta\Theta' U = 0$, e $\theta\theta' u = 0$ determineranno gli elementi S ed s congiunti ad (U, u) in s' ed S'.

Se S è l'elemento armonico di s rispetto ad U, o pure s è l'elemento armonico di S rispetto ad u, si avrà

$$(4) \qquad \frac{U_1}{S_1} = \frac{U_2}{S_2} = \frac{U_3}{S_3}\,, \quad \text{o pure} \quad \frac{u_1}{s_1} = \frac{u_2}{s_2} = \frac{u_3}{s_3}\,;$$

questi due sistemi di equazioni sono conseguenza l'uno dell'altro, per le relazioni tra i coefficienti A_{ij} ed a_{ij} delle forme congiunte U ed u.

Le forme $\Theta'\Theta'' U$ e $\theta'\theta'' u$ essendo simmetriche rispetto agli elementi (s', s'') ed (S', S''), se all'elemento S', armonico di s' rispetto ad U, appartiene s'', o pure se all'elemento s', armonico di S' rispetto ad u, appartiene S'', viceversa all'elemento S'', armonico di s'' rispetto ad U, apparterrà s', o pure all'elemento s'', armonico di S'' rispetto ad u, apparterrà S'; esprimendo queste condizioni si vedrà che alle equazioni $\Theta\Theta U = 0$, e $\theta'\theta'' u = 0$, potranno darsi le forme

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & s'_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & s'_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & s'_3 \\ s''_1, & s''_2, & s''_3, & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & S'_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & S'_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & S'_3 \\ S''_1, & S''_2, & S''_3, & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Se i due elementi (s', s'') coincidono con s, ed i due elementi (S', S'') coincidono con S, l'equazioni (5) esprimeranno lo stesso che $U=0$ ed $u=0$.

Siano le due terne (s', s'', s''') ed (S', S'', S''') tali che gli elementi dell'una siano rispettivamente armonici degli elementi dell'altra rispetto ad (U, u); gli elementi s ed S di queste terne essendo dati dalle equazioni

$$\theta\theta' u=0\,,\quad \theta\theta'' u=0\,,\quad \theta\theta''' u=0\,;\qquad \Theta\Theta' U=0\,,\quad \Theta\Theta'' U=0\,,\quad \Theta\Theta''' U=0\,,$$

i tre elementi S determinati dalle coppie $(s', S''S''')$, $(s'', S'''S')$, $(s''', S'S'')$ apparterranno all'elemento s determinato dall'equazioni

$$(6)\qquad \Theta''\Theta''' U . \Theta\Theta' U = \Theta'''\Theta' U . \Theta\Theta'' U = \Theta'\Theta'' U . \Theta\Theta''' U\,,$$

ed i tre elementi s determinati dalle coppie $(S', s''s''')$, $(S'', s'''s')$, $(S''', s's'')$ apparterranno all'elemento S determinato dall'equazioni

$$(6)\qquad \theta''\theta''' u . \theta\theta' u = \theta'''\theta' u . \theta\theta'' u = \theta'\theta'' u . \theta\theta''' u\,.$$

Gli elementi s ed S dati dai due sistemi di equazioni (6) sono armonici l'uno dell'altro rispetto ad (U, u).

Le due terne (s', s'', s''') ed (S', S'', S''') si diranno *coniugate armoniche* rispetto ad (U, u); se queste terne costituiscono una medesima terna $(s's''s''', S'S''S''')$ di elementi s ed S, essa si dirà *coniugata armonica di sè stessa*, o semplicemente *coniugata* rispetto ad (U, u); le condizioni per una terna coniugata rispetto ad (U, u) sono espresse dalle equazioni

$$(7)\quad \Theta''\Theta''' U=0,\ \Theta'''\Theta' U=0,\ \Theta'\Theta'' U=0;\ \theta''\theta''' u=0,\ \theta'''\theta' u=0,\ \theta'\theta'' u=0,$$

il secondo sistema delle quali è conseguenza del primo.

Se s, s'. s'' sono armonici di S, S', S'' rispetto ad (U, u) ed è

$$s_1 = \sigma' s'_1 + \sigma'' s''_1\,,\qquad \text{o pure}\qquad S_1 = \Sigma' S'_1 + \Sigma'' S''_1\,,$$

sarà viceversa

$$S_1 = \sigma' S'_1 + \sigma'' S''_1\,,\qquad \text{o pure}\qquad s_1 = \Sigma' s'_1 + \Sigma'' s''_1\,;$$

i due sistemi di elementi s, S, appartenenti al variare di $\sigma' : \sigma''$, o pure di $\Sigma' : \Sigma''$, ad $s's''$ e ad $S'S''$, saranno quindi in dipendenza equianarmonica.

Allorchè si annulla il discriminante Δ di una quadrica U, vale a dire allorchè U si riduce ad una coppia di elementi (X, Y), e quindi la forma congiunta u si riduce ad una coppia di elementi coincidenti con l'elemento XY determinato dall'equazioni

$$U_1=0\,,\ U_2=0\,,\ U_3=0\,,\quad \text{onde}\quad \frac{s_1}{a_{i1}}=\frac{s_2}{a_{i2}}=\frac{s_3}{a_{i3}}\,,$$

considerando una coppia di elementi (S', S'') coniugata armonica rispetto ad (X, Y), ogni elemento s appartenente ad S' o ad S'' avrà per suo elemento armonico S rispetto ad U, S'' o S', e viceversa se S coincide con S' o con S'', il suo elemento armonico s rispetto ad u sarà un elemento qualunque appartenente ad S'' o ad S'. Similmente allorchè si annulla il discriminante δ di una quadrica u, vale a dire allorchè u si riduce ad una coppia di elementi (x, y), e quindi la forma congiunta U si riduce ad una coppia di elementi coincidenti con l'elemento xy determinato dall'equazioni

$$u_1=0\,,\ u_2=0\,,\ u_3=0\,,\quad \text{onde}\quad \frac{S_1}{A_{i1}}=\frac{S_2}{A_{i2}}=\frac{S_3}{A_{i3}}\,,$$

considerando una coppia di elementi (s', s'') coniugata armonica rispetto ad (x, y), ogni elemento S appartenente ad s' o ad s'' avrà per suo elemento armonico s, rispetto ad u, s'' o s', e viceversa se s coincide con s' o con s'', il suo elemento armonico S rispetto ad U sarà un elemento qualunque appartenente ad s'' o ad s'.

5. *Elementi comuni ad una forma quadratica e ad una forma lineare.* Riprendiamo l'equazioni

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\theta'^2 U\sigma'^2+2\theta'\theta'' U\sigma'\sigma''+\theta''^2 U\sigma''^2=0\,,\\ &\vartheta'^2 u\Sigma'^2+2\vartheta'\vartheta'' u\Sigma'\Sigma''+\vartheta''^2 u\Sigma''^2=0\,; \end{aligned}$$

se i due valori di $\sigma' : \sigma''$ e di $\Sigma' : \Sigma''$ ricavati da esse si pongono successivamente nelle espressioni

$$\frac{s_1}{\sigma' s_1' + \sigma'' s_1''}=\frac{s_2}{\sigma' s_2' + \sigma'' s_2''}=\frac{s_3}{\sigma' s_3' + \sigma'' s_3''}\,,$$

$$\frac{S_1}{\Sigma' S_1' + \Sigma'' S_1''}=\frac{S_2}{\Sigma' S_2' + \Sigma'' S_2''}=\frac{S_3}{\Sigma' S_3' + \Sigma'' S_3''}\,,$$

si otterranno i rapporti tra le coordinate s_i o S_i dei due elementi s o S comuni ad U ed $s's''$ o ad u ed $S'S''$.

Indichiamo con

$$(2)\qquad S=S_1 s_1+S_2 s_2+S_3 s_3\,,\qquad \text{o pure}\qquad s=s_1 S_1+s_2 S_2+s_3 S_3\,,$$

la forma lineare cui appartiene la coppia (s', s'') o (S', S''), sicchè possa supporsi

$$(3)\qquad \begin{array}{lll} S_1=s'_2 s''_3-s'_3 s''_2\,, & S_2=s'_3 s''_1-s'_1 s''_3\,, & S_3=s'_1 s''_2-s'_2 s''_1\,,\\ s_1=S'_2 S''_3-S'_3 S''_2\,, & s_2=S'_3 S''_1-S'_1 S''_3\,, & s_3=S'_1 S''_2-S'_2 S''_1\,, \end{array}$$

e si ponga

$$(4)\quad -\tfrac{1}{4}\Phi'\Phi''U=\begin{vmatrix} A_{11}\,, & A_{12}\,, & A_{13}\,, & S_1\\ A_{21}\,, & A_{22}\,, & A_{23}\,, & S_2\\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33}\,, & S_3\\ S_1\,, & S_2\,, & S_3\,, & 0 \end{vmatrix}\,,\quad -\tfrac{1}{4}\varphi'\varphi''u=\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & a_{13}\,, & s_1\\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & a_{23}\,, & s_2\\ a_{31}\,, & a_{32}\,, & a_{33}\,, & s_3\\ s_1\,, & s_2\,, & s_3\,, & 0 \end{vmatrix}\,,$$

si troverà

$$(5)\qquad \Theta'^2U.\Theta''^2U-(\Theta'\Theta''U)^2=\Phi'\Phi''U\,,\quad \theta'^2u.\theta''^2u-(\theta'\theta''u)^2=\varphi'\varphi''u\,,$$

sicchè le radici $\sigma':\sigma''$ e $\Sigma':\Sigma''$ dell'equazioni (1) saranno reali, coincidenti, o immaginario, secondo che le quantità $\Phi'\Phi''U$, e $\varphi'\varphi''u$ saranno negative, nulle o positive, adunque, osservando che le espressioni $\frac{1}{4}\Phi'\Phi''U$ ed $\frac{1}{4}\varphi'\varphi''u$ non differiscono dalle forme congiunte di U ed u, si potrà conchiudere che gli elementi comuni ad una forma quadratica U o u e ad una forma lineare S o s saranno reali, coincidenti o immaginarii, secondo che, per le coordinate dell'elemento determinato dalla forma lineare, il valore della forma quadratica congiunta ad U o ad u è negativo, nullo o positivo.

Segue dalle cose dette che l'equazioni

$$(6)\qquad \begin{array}{l} \Phi\Phi'U=\Theta^2U.\Theta'^2U-(\Theta\Theta'U)^2=0\,,\\ \varphi\varphi'u=\theta^2u.\theta'^2u-(\theta\theta'u)^2=0\,, \end{array}$$

determineranno le coppie degli elementi S o s congiunti ad U o ad u, ed appartcuenti ad s' o ad S'.

Gli elementi comuni ad (U, S) si possono determinare ancora nel seguente modo *).

*) Aronhold. Crelle, Bd. 61, pag. 102

Essendo

$$U = U_1 s_1 + U_2 s_2 + U_3 s_3 = 0 , \qquad S = S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3 = 0 ,$$

se s'indica con k un fattore indeterminato, verrà

$$(6) \quad -ks_1 + U_3 S_2 - U_2 S_3 = 0 , \; -ks_2 + U_1 S_3 - U_3 S_1 = 0 , \; -ks_3 + U_2 S_1 - U_1 S_2 = 0 ,$$

e quindi i valori di $s_1 : s_2 : s_3$ relativi agli elementi comuni ad U ed S saranno dati dall'equazioni

$$(7) \quad \begin{aligned} & s_1 (A_{13} S_2 - A_{12} S_3 - k) + s_2 (A_{23} S_2 - A_{22} S_3) + s_3 (A_{33} S_2 - A_{32} S_3) = 0 , \\ & s_1 (A_{11} S_3 - A_{13} S_1) + s_2 (A_{21} S_3 - A_{23} S_1 - k) + s_3 (A_{31} S_3 - A_{33} S_1) = 0 , \\ & s_1 (A_{12} S_1 - A_{11} S_2) + s_2 (A_{22} S_1 - A_{21} S_2) + s_3 (A_{32} S_1 - A_{31} S_2 - k) = 0 , \end{aligned}$$

ponendo in esse successivamente per k i valori che annullsno il loro determinante. Indicando con u la forma congiunta di U, questo determinante si troverà espresso dal prodotto di $-k$ per $k^2 + u$, e dovrà escludersi la soluzione $k = 0$, la quale corrisponde alla supposizione che gli elementi comuni ad U ed S siano tra loro coincidenti.

Ricavando i valori di s_1 , s_2 , s_3 dall'equazioni

$$A_{11} s_1 + A_{12} s_2 + A_{13} s_3 = U_1 , \; A_{21} s_1 + A_{22} s_2 + A_{23} s_3 = U_2 , \; A_{31} s_1 + A_{32} s_2 + A_{33} s_3 = U_3 ,$$

si avrà per le relazioni (7)

$$\begin{aligned} & a_{11} U_1 + a_{12} U_2 + a_{13} U_3 + \frac{\Delta}{k} (U_2 S_3 - U_3 S_2) = 0 , \\ & a_{21} U_1 + a_{22} U_2 + a_{23} U_3 + \frac{\Delta}{k} (U_3 S_1 - U_1 S_3) = 0 , \\ & a_{31} U_1 + a_{32} U_2 + a_{33} U_3 + \frac{\Delta}{k} (U_1 S_2 - U_2 S_1) = 0 , \end{aligned}$$

e quindi i valori di k saranno dati anche dall'equazioni

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{11} , & a_{12} + \frac{\Delta S_3}{k} , & a_{13} - \frac{\Delta S_2}{k} \\ a_{21} - \frac{\Delta S_3}{k} , & a_{22} , & a_{23} + \frac{\Delta S_1}{k} \\ a_{31} + \frac{\Delta S_2}{k} , & a_{32} - \frac{\Delta S_1}{k} , & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

che si riduce come sopra a $k^2 + u = 0$.

Con un procedimento analogo si potranno determinare gli elementi comuni ad u ed s.

Essendo $(s's''s''', S'S''S''')$ una terna arbitraria di elementi s, S, se nell'equazioni $U=0$ ed $u=0$ si ponga

$$s_1=\sigma' s'_1+\sigma'' s''_1+\sigma''' s'''_1 \,, \qquad S_1=\Sigma' S'_1+\Sigma'' S''_1+\Sigma''' S'''_1 \,,$$

si avranno l'equazioni

$$(9)\quad \begin{aligned} &\Theta'^2 U\sigma'^2+\Theta''^2 U\sigma''^2+\Theta'''^2 U\sigma'''^2 \\ &+2(\Theta''\Theta''' U\sigma''\sigma'''+\Theta'''\Theta' U\sigma'''\sigma'+\Theta'\Theta'' U\sigma'\sigma'')=0 \,, \\ &\theta'^2 u\Sigma'^2+\theta''^2 u\Sigma''^2+\theta'''^2 u\Sigma'''^2 \\ &+2(\theta''\theta''' u\Sigma''\Sigma'''+\theta'''\theta' u\Sigma'''\Sigma'+\theta'\theta'' u\Sigma'\Sigma'')=0 \,, \end{aligned}$$

le quali esprimeranno, tra le coordinate $(\sigma', \sigma'', \sigma''')$ e $(\Sigma', \Sigma'', \Sigma''')$ degli elementi s ed S, la quadrica (U, u) riferita alla terna $(s's''s''', S'S''S''')$.

Indicando con (s'_2, s'_3), (s''_3, s''_1), (s'''_1, s'''_2) le coppie degli elementi s comuni rispettivamente ad (U, S'), (U, S''), (U, S'''), e con (S'_2, S'_3), (S''_3, S''_1), (S'''_1, S'''_2) le coppie degli elementi S comuni rispettivamente ad (u, s'), (u, s''), (u, s'''), si avranno le relazioni

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\Theta''^2 U}{P.s''s'_2\, P.s''s'_3} &= -\frac{2\Theta''\Theta''' U}{P.s''s'_3\, P.s'''s'_2+P.s''s'_2\, P.s'''s'_3} = \frac{\Theta'''^2 U}{P.s'''s'_2\, P.s'''s'_3} \,, \\ \frac{\Theta'''^2 U}{P.s'''s''_3\, P.s'''s''_1} &= -\frac{2\Theta'''\Theta' U}{P.s'''s''_1\, P.s's''_3+P.s'''s''_3\, P.s's''_1} = \frac{\Theta'^2 U}{P.s's''_3\, P.s's''_1} \,, \\ \frac{\Theta'^2 U}{P.s's'''_1\, P.s's'''_2} &= -\frac{2\Theta'\Theta'' U}{P.s's'''_2\, P.s''s'''_1+P.s's'''_1\, P.s''s'''_2} = \frac{\Theta''^2 U}{P.s''s'''_1\, P.s''s'''_2} \,; \\ \frac{\theta''^2 u}{p.S''S'_2\, p.S''S'_3} &= -\frac{2\theta''\theta''' u}{p.S''S'_3\, p.S'''S'_2+p.S''S'_2\, p.S'''S'_3} = \frac{\theta'''^2 u}{p.S'''S'_2\, p.S'''S'_3} \,, \\ \frac{\theta'''^2 u}{p.S'''S''_3\, p.S'''S''_1} &= -\frac{2\theta'''\theta' u}{p.S'''S''_1\, p.S'S''_3+p.S'''S''_3\, p.S'S''_1} = \frac{\theta'^2 u}{p.S'S''_3\, p.S'S''_1} \,, \\ \frac{\theta'^2 u}{p.S'S'''_1\, p.S'S'''_2} &= -\frac{2\theta'\theta'' u}{p.S'S'''_2\, p.S''S'''_1+p.S'S'''_1\, p.S''S'''_2} = \frac{\theta''^2 u}{p.S''S'''_1\, p.S''S'''_2} \,. \end{aligned}$$

Da esse si deduce

$$(11)\quad \begin{aligned} &\frac{(P.s''s'_3\, P.s''s'_2)(P.s'''s''_1\, P.s'''s''_3)(P.s's'''_2\, P.s's'''_1)}{(P.s'''s'_2\, P.s'''s'_3)(P.s's''_3\, P.s's''_1)(P.s''s'''_1\, P.s''s'''_2)}=1 \,, \\ &\frac{(p.S''S'_3\, p.S''S'_2)(p.S'''S''_1\, p.S'''S''_3)(p.S'S'''_2\, p.S'S'''_1)}{(p.S'''S'_2\, p.S'''S'_3)(p.S'S''_3\, p.S'S''_1)(p.S''S'''_1\, p.S''S'''_2)}=1 \,. \end{aligned}$$

6. ***Metrica analitica del sistema ternario.*** Siano U ed u due forme quadratiche congiunte, che chiameremo *l'Assoluto* *) del sistema ternario, e supponiamo in primo luogo che i loro discriminanti Δ e δ (l'uno dei quali è il quadrato dell'altro) siano diversi da zero. Ritenendo le notazioni precedenti, si avranno per due coppie qualunque di elementi (s', s''), (S', S'') le identità

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Theta'^2U.\Theta''^2U-(\Theta'\Theta''U)^2=\Phi'\Phi''U\,,\\ &\vartheta'^2u.\vartheta''^2u\;-(\vartheta'\vartheta''u)^2\;=\varphi'\varphi''u\,,\end{aligned}$$

si potrà quindi supporre simultaneamente

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\Theta'^2U.\Theta''^2U\,\mathrm{sen}^2\lambda=\Phi'\Phi''U\,, \qquad \Theta'^2U.\Theta''^2U\cos^2\lambda=(\Theta'\Theta''U)^2,\\ &\vartheta'^2u.\vartheta''^2u\;\;\mathrm{sen}^2\Lambda=\varphi'\varphi''u\,, \qquad \vartheta'^2u.\vartheta''^2u\;\;\cos^2\Lambda=(\vartheta'\vartheta''u)^2\,.\end{aligned}$$

Chiamiamo λ e Λ gl'*intervalli* fra gli elementi (s', s'') ed (S', S''); si avrà quindi

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Int.}(s's'')\;=\mathrm{arc.sen}\frac{\sqrt{\Phi'\Phi''U}}{\sqrt{\Theta'^2U.\Theta''^2U}}=\mathrm{arc.cos}\frac{\Theta'\Theta''U}{\sqrt{\Theta'^2U.\Theta''^2U}}\,,\\ &\mathrm{Int.}(S'S'')=\mathrm{arc.sen}\frac{\sqrt{\varphi'\varphi''u}}{\sqrt{\vartheta'^2u.\vartheta''^2u}}=\mathrm{arc.cos}\frac{\vartheta'\vartheta''u}{\sqrt{\vartheta'^2u.\vartheta''^2u}}\,.\end{aligned}$$

Essendo (per la moltiplicazione dei determinanti)

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}\\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}\\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3\\ s'_1, & s'_2, & s'_3\\ s''_1, & s''_2, & s''_3\end{vmatrix}^2=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}\Theta^2U, & \Theta\Theta'U, & \Theta\Theta''U\\ \Theta'\Theta U, & \Theta'^2U, & \Theta'\Theta''U\\ \Theta''\Theta U, & \Theta''\Theta'U, & \Theta''^2U\end{vmatrix}\,,\\ &\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3\\ S'_1, & S'_2, & S'_3\\ S''_1, & S''_2, & S''_3\end{vmatrix}^2=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}\vartheta^2u, & \vartheta\vartheta'u, & \vartheta\vartheta''u\\ \vartheta'\vartheta u, & \vartheta'^2u, & \vartheta'\vartheta''u\\ \vartheta''\vartheta u, & \vartheta''\vartheta'u, & \vartheta''^2u\end{vmatrix}\,.\end{aligned}$$

se i tre elementi s, s', s'' appartengono ad uno stesso elemento S, o pure

*) Cayley, *Sixth Memoir on Quantics*. Philo Trans Vol. 149.

se i tre elementi S, S', S'' appartengono ad uno stesso elemento s, essendo allora

$$\begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ s'_1, & s'_2, & s'_3 \\ s''_1, & s''_2, & s''_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o pure} \quad \begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ S'_1, & S'_2, & S'_3 \\ S''_1, & S''_2, & S''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

sarà

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \Theta^2 U, & \Theta\Theta' U, & \Theta\Theta'' U \\ \Theta'\Theta U, & \Theta'^2 U, & \Theta'\Theta'' U \\ \Theta''\Theta U, & \Theta''\Theta' U, & \Theta''^2 U \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o pure} \quad \begin{vmatrix} \theta^2 u, & \theta\theta' u, & \theta\theta'' u \\ \theta'\theta u, & \theta'^2 u, & \theta'\theta'' u \\ \theta''\theta u, & \theta''\theta' u, & \theta''^2 u \end{vmatrix} = 0,$$

onde (per le relazioni goniometriche fondamentali)

$$\text{arc.cos}\frac{\Theta\Theta'' U}{\sqrt{\Theta^2 U . \Theta''^2 U}} - \text{arc.cos}\frac{\Theta\Theta' U}{\sqrt{\Theta^2 U . \Theta'^2 U}} = \text{arc.cos}\frac{\Theta'\Theta'' U}{\sqrt{\Theta'^2 U . \Theta''^2 U}},$$

$$\text{arc.cos}\frac{\theta\theta'' u}{\sqrt{\theta^2 u . \theta''^2 u}} - \text{arc.cos}\frac{\theta\theta' u}{\sqrt{\theta^2 u . \theta'^2 u}} = \text{arc.cos}\frac{\theta'\theta'' u}{\sqrt{\theta'^2 u . \theta''^2 u}},$$

e quindi, nell'ipotesi suddetta, *l'intervallo* fra gli elementi s o S del sistema ternario sarà definito dalla proprietà caratteristica espressa dall'una o dall'altra delle equazioni

$$(6) \quad \begin{aligned} &\text{Int.}(ss'') - \text{Int.}(ss') = \text{Int.}(s's''), \\ &\text{Int.}(SS'') - \text{Int.}(SS') = \text{Int.}(S'S''). \end{aligned}$$

Se l'intervallo è nullo i due elementi saranno tra loro coincidenti, se poi l'intervallo è eguale ad un quadrante, i due elementi saranno coniugati armonici rispetto all'Assoluto (U, u); in tal caso la coppia (s', s'') o (S', S'') si dirà *principale* o *ortogonale*.

Se (s', S') ed (s'', S'') sono coppie di elementi armonici l'uno dell'altro rispetto all'Assoluto, essendo per ciascuna di tali coppie (s, S)

$$\frac{U_1}{S_1} = \frac{U_2}{S_2} = \frac{U_3}{S_3}, \quad \text{o pure} \quad \frac{u_1}{s_1} = \frac{u_2}{s_2} = \frac{u_3}{s_3},$$

si troverà

$$\text{sen}^2\lambda = \text{sen}^2\Lambda = \frac{(s'_2 s''_3 - s'_3 s''_2)(S'_2 S''_3 - S'_3 S''_2) + (s'_3 s''_1 - s'_1 s''_3)(S'_3 S''_1 - S'_1 S''_3) + (s'_1 s''_2 - s'_2 s''_1)(S'_1 S''_2 - S'_2 S''_1)}{(s'_1 S'_1 + s'_2 S'_2 + s'_3 S'_3)(s''_1 S''_1 + s''_2 S''_2 + s''_3 S''_3)}$$

$$\cos^2\lambda = \cos^2\Lambda = \frac{(s'_1 S''_1 + s'_2 S''_2 + s'_3 S''_3)(S'_1 s''_1 + S'_2 s''_2 + S'_3 s''_3)}{(s'_1 S'_1 + s'_2 S'_2 + s'_3 S'_3)(s''_1 S''_1 + s''_2 S''_2 + s''_3 S''_3)},$$

sarà dunque $\lambda=\Lambda$, o sia l'intervallo fra due elementi (s', s'') è lo stesso di quello fra gli elementi (S', S'') armonici dei primi rispetto all'Assoluto.

Chiamiamo *intervallo* fra due elementi (s, S) il complemento al quadrante di quello che passa tra uno di essi, e l'elemento armonico dell'altro rispetto all'Assoluto; sarà quindi

$$(7) \qquad \begin{aligned} \text{Int.}(sS) &= \text{arc.sen}\frac{s_1S_1+s_2S_2+s_3S_3}{\sqrt{U.u}}\sqrt{\Delta}\,, \\ \text{Int.}(Ss) &= \text{arc.sen}\frac{S_1s_1+S_2s_2+S_3s_3}{\sqrt{u.U}}\sqrt{\delta}\,, \end{aligned}$$

dovendosi prendere la prima o la seconda di queste formole, secondo che si riguarda u come forma congiunta di U, o pure U come forma congiunta di u.

Essendo s' o S' un elemento qualunque, ciascuna delle equazioni

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\Theta^2U.\Theta'^2U\,\text{sen}^2\lambda=\Phi\Phi'U\,, \\ &\Theta^2U.\Theta'^2U\cos^2\lambda=(\Theta\Theta'U)^2\,, \end{aligned} \quad \text{o pure} \quad \begin{aligned} &\theta^2u.\theta'^2u\,\text{sen}^2\Lambda=\varphi\varphi'u \\ &\theta^2u.\theta'^2u\cos^2\Lambda=(\theta\theta'u)^2 \end{aligned}$$

determinerà uno stesso sistema quadratico Γ o γ di elementi s o S, tutti allo stesso intervallo λ o Λ da s' o da S'; questo sistema si dirà *quadrica circolare*, di elemento *centrale* o di simmetria s' o S', e di *raggio* λ o Λ; se s' ed S' sono elementi armonici l'uno dell'altro rispetto all'Assoluto, e gli angoli λ e Λ sono complementari, le quadriche circolari Γ e γ saranno congiunte tra loro; la quadrica circolare (Γ, γ) e l'Assoluto (U, u) hanno due coppie (x, X), (y, Y) di elementi congiunti comuni, essendo i due elementi (x, y) o (X, Y) i due elementi comuni ad (U, S') o ad (u, s').

Siano ora i discriminanti Δ e δ di U ed u eguali a zero, e propriamente supponiamo che, riguardandosi U come forma congiunta di u, si riduca u ad una coppia di elementi (x, y), e quindi U ad una coppia di elementi coincidenti con l'elemento xy. In tal caso (osservando che $\frac{1}{4}\Phi'\Phi''U=\delta u$) l'espressione dell'intervallo λ fra i due elementi (s', s'') si presenterà sotto la forma di un arco infinitamente piccolo; ma ponendo $\frac{\lambda}{\rho}$ in vece di λ, sviluppando in serie $\text{sen}\frac{\lambda}{\rho}$, e supponendo por $\rho=\infty$, *lim.* $\rho\sqrt{\delta}=k$, essendo k una quantità arbitraria, si troverà

$$(9) \qquad \text{Int.}(s's'')=\frac{\sqrt{4u}}{\sqrt{\Theta'^2U.\Theta''^2U}}\,k\,.$$

Si avrà poi (osservando che $\frac{1}{4}\varphi'\varphi''u=U$)

$$(10) \qquad \text{Int.}(S'S'')=\text{arc.sen}\,\frac{\sqrt{4U}}{\sqrt{\theta'^2u\,.\,\theta''^2u}}=\text{arc.cos}\,\frac{\theta'\theta''u}{\sqrt{\theta'^2u\,.\,\theta''^2u}}\,.$$

Finalmonte se sull'espressione (7) di Int.(Ss) (la quale si presenta sotto la forma di un arco infinitamente piccolo) si opera oome poeanzi sull'espressioni di Int.$(s's'')$, si troverà

$$(11) \qquad \text{Int.}(Ss)=\frac{S_1s_1+S_2s_2+S_3s_3}{\sqrt{u\,.\,U}}\,k\,.$$

Essendo s' un elemento arbitrario, l'equazione

$$\theta'U\,.\,\theta'^2U\lambda^2=4k^2u\,,$$

dinoterà una *quadrica circolare* Γ di *centro* s' e di *raggio* λ. A Γ appartengono i due elementi (x, y) determinati dall'Assoluto.

7. *Rappresentazione geometrica del sistema ternario.* La più semplice rappresentazione del sistema ternario consiste nel supporre che gli elementi s ed S siano una retta ed un piano che passano per un punto fisso, o pure siano un punto ed una retta che giacciono in un piano fisso: nel primo caso due quadriche congiunte saranno rappresentate da una superficie conica di 2° ordine e di 2ª classe, locale delle sue rette generatrici, ed inviluppo dei suoi piani tangenti; nel secondo caso poi due quadriche congiunte saranno rappresentate da una linea di 2° ordine e di 2ª classe, locale dei suoi punti, ed inviluppo delle sue rette tangenti.

Consideriamo da principio il sistema delle rette e dei piani concorrenti in un punto; le relazioni metriche fondamentali di un tal sistema si dedurranno agevolmente dalle formole del numero precedente. Infatti, la proprietà caratteristica dell'intervallo fra due elementi (s', s'') ed (S', S''), espressa dall'equazione (6) del numero precedente, competerà evidentemente all'angolo $s's''$ fra le due rette (s', s'') ed all'angolo $S'S''$ fra i due piani (S', S''), supporremo adunque

$$\text{Int.}(s's'')=s's''\,, \qquad \text{Int.}(S'S'')=S'S''\,.$$

Due rette, o pure due piani perpendicolari tra loro (ad intervallo cioè

eguale al quadrante) essendo elementi coniugati armonici rispetto all'Assoluto del sistema, una retta ed un piano perpendicolari tra loro saranno elementi armonici l'uno dell'altro rispetto all'Assoluto. Segue da ciò che l'Assoluto del sistema di rette e di piani concorrenti in un punto è la superficie conica di 2° ordine e di 2ª classe caratterizzata dalla proprietà singolare che ogni suo piano tangente e la corrispondente generatrice di contatto sono tra loro perpendicolari.

Ponendo nelle forme quadratiche U ed u che determinano l'Assoluto, $\frac{s_i}{\sqrt{A_{ii}}}$ ed $\frac{S_i}{\sqrt{a_{ii}}}$ in vece di s_i ed S_i, ed osservando che, per essere evidentemente l'Assoluto una superficie conica immaginaria, si può supporre

$$\frac{A_{ik}}{\sqrt{A_{ii}\cdot A_{kk}}}=\cos\lambda_h\,, \qquad \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\cdot a_{kk}}}=\cos\Lambda_h\,,$$

si avrà

$$(1)\qquad \begin{aligned} U&=s_1^2+s_2^2+s_3^2+2s_2s_3\cos\lambda_1+2s_3s_1\cos\lambda_2+2s_1s_2\cos\lambda_3\,,\\ u&=S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_2S_3\cos\Lambda_1+2S_3S_1\cos\Lambda_2+2S_1S_2\cos\Lambda_3\,. \end{aligned}$$

Le attuali forme congiunte di U e di u essendo rispettivamente

$$(2)\qquad \begin{aligned} u(S_1\operatorname{sen}\lambda_1, S_2\operatorname{sen}\lambda_2, S_3\operatorname{sen}\lambda_3)&=S_1^2\operatorname{sen}^2\lambda_1+S_2^2\operatorname{sen}^2\lambda_2+S_3^2\operatorname{sen}^2\lambda_3\\ &+2S_2S_3(\cos\lambda_2\cos\lambda_3-\cos\lambda_1)+2S_3S_1(\cos\lambda_3\cos\lambda_1-\cos\lambda_2)\\ &+2S_1S_2(\cos\lambda_1\cos\lambda_2-\cos\lambda_3)\,,\\ U(s_1\operatorname{sen}\Lambda_1, s_2\operatorname{sen}\Lambda_2, s_3\operatorname{sen}\Lambda_3)&=s_1^2\operatorname{sen}^2\Lambda_1+s_2^2\operatorname{sen}^2\Lambda_2+s_3^2\operatorname{sen}^2\Lambda_3\\ &+2s_2s_3(\cos\Lambda_2\cos\Lambda_3-\cos\Lambda_1)+2s_3s_1(\cos\Lambda_3\cos\Lambda_1-\cos\Lambda_2)\\ &+2s_1s_2(\cos\Lambda_1\cos\Lambda_2-\cos\Lambda_3) \end{aligned}$$

per l'indicato cambiamento di variabili si avranno le relazioni

$$(3)\qquad \begin{aligned} \cos\lambda_1&=\cos\lambda_2\cos\lambda_3-\operatorname{sen}\lambda_2\operatorname{sen}\lambda_3\cos\Lambda_1\,,\\ \cos\lambda_2&=\cos\lambda_3\cos\lambda_1-\operatorname{sen}\lambda_3\operatorname{sen}\lambda_1\cos\Lambda_2\,,\\ \cos\lambda_3&=\cos\lambda_1\cos\lambda_2-\operatorname{sen}\lambda_1\operatorname{sen}\lambda_2\cos\Lambda_3\,,\\ \cos\Lambda_1&=\cos\Lambda_2\cos\Lambda_3-\operatorname{sen}\Lambda_2\operatorname{sen}\Lambda_3\cos\lambda_1\,,\\ \cos\Lambda_2&=\cos\Lambda_3\cos\Lambda_1-\operatorname{sen}\Lambda_3\operatorname{sen}\Lambda_1\cos\lambda_2\,,\\ \cos\Lambda_3&=\cos\Lambda_1\cos\Lambda_2-\operatorname{sen}\Lambda_1\operatorname{sen}\Lambda_2\cos\lambda_3\,; \end{aligned}$$

si avranno poi per i discriminanti Δ e δ di U ed u le espressioni

$$\Delta = 1 - \cos^2\lambda_1 - \cos^2\lambda_2 - \cos^2\lambda_3 + 2\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3 \,,$$
$$\delta = 1 - \cos^2\Lambda_1 - \cos^2\Lambda_2 - \cos^2\Lambda_3 + 2\cos\Lambda_1\cos\Lambda_2\cos\Lambda_3 \,,$$

e per le relazioni (3)

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\text{sen}\,\lambda_1}{\text{sen}\,\Lambda_1} = \frac{\text{sen}\,\lambda_2}{\text{sen}\,\Lambda_2} = \frac{\text{sen}\,\lambda_3}{\text{sen}\,\Lambda_3} = \frac{\sqrt{\delta}}{\text{sen}\,\Lambda_1\,\text{sen}\,\Lambda_2\,\text{sen}\,\Lambda_3}\,, \\ \frac{\text{sen}\,\Lambda_1}{\text{sen}\,\lambda_1} = \frac{\text{sen}\,\Lambda_2}{\text{sen}\,\lambda_2} = \frac{\text{sen}\,\Lambda_3}{\text{sen}\,\lambda_3} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\text{sen}\,\lambda_1\,\text{sen}\,\lambda_2\,\text{sen}\,\lambda_3}\,. \end{aligned}$$

La posizione di una retta s o di un piano S del sistema essendo determinata dai soli rapporti tra le sue coordinate, si può supporre che i valori assoluti di (s_1, s_2, s_3) e di (S_1, S_2, S_3) rendano le forme quadratiche U ed u eguali all'unità. In questa supposizione, ponendo

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Sigma_1 &= s'_2 s''_3 - s'_3 s''_2\,, & \Sigma_2 &= s'_3 s''_1 - s'_1 s''_3\,, & \Sigma_3 &= s'_1 s''_2 - s'_2 s''_1\,, \\ \sigma_1 &= S'_2 S''_3 - S'_3 S''_2\,, & \sigma_2 &= S'_3 S''_1 - S'_1 S''_3\,, & \sigma_3 &= S'_1 S''_2 - S'_2 S''_1\,, \end{aligned}$$

le formole (3) del numero precedente daranno

$$(6)\qquad \begin{aligned} \cos s's'' &= s'_1 s''_1 + s'_2 s''_2 + s'_3 s''_3 + (s'_2 s''_3 + s'_3 s''_2)\cos\lambda_1 + (s'_3 s''_1 + s'_1 s''_3)\cos\lambda_2 \\ &\quad + (s'_1 s''_2 + s'_2 s''_1)\cos\lambda_3\,, \\ \cos S'S'' &= S'_1 S''_1 + S'_2 S''_2 + S'_3 S''_3 + (S'_2 S''_3 + S'_3 S''_2)\cos\Lambda_1 + (S'_3 S''_1 + S'_1 S''_3)\cos\Lambda_2 \\ &\quad + (S'_1 S''_2 + S'_2 S''_1)\cos\Lambda_3\,, \\ \text{sen}^2 s's'' &= u(\Sigma_1\,\text{sen}\,\lambda_1, \Sigma_2\,\text{sen}\,\lambda_2, \Sigma_3\,\text{sen}\,\lambda_3) = \Sigma_1^2\,\text{sen}^2\lambda_1 + \Sigma_2^2\,\text{sen}^2\lambda_2 + \Sigma_3^2\,\text{sen}^2\lambda_3 \\ &\quad + 2\Sigma_2\Sigma_3\,\text{sen}\,\lambda_2\,\text{sen}\,\lambda_3\cos\Lambda_1 + 2\Sigma_3\Sigma_1\,\text{sen}\,\lambda_3\,\text{sen}\,\lambda_1\cos\Lambda_2 \\ &\quad + 2\Sigma_1\Sigma_2\,\text{sen}\,\lambda_1\,\text{sen}\,\lambda_2\cos\Lambda_3\,, \\ \text{sen}^2 S'S'' &= U(\sigma_1\,\text{sen}\,\Lambda_1, \sigma_2\,\text{sen}\,\Lambda_2, \sigma_3\,\text{sen}\,\Lambda_3) = \sigma_1^2\,\text{sen}^2\Lambda_1 + \sigma_2^2\,\text{sen}^2\Lambda_2 + \sigma_3\,\text{sen}^2\Lambda_3 \\ &\quad + 2\sigma_2\sigma_3\,\text{sen}\,\Lambda_2\,\text{sen}\,\Lambda_3\cos\lambda_1 + 2\sigma_3\sigma_1\,\text{sen}\,\Lambda_3\,\text{sen}\,\Lambda_1\cos\lambda_2 \\ &\quad + 2\sigma_1\sigma_2\,\text{sen}\,\Lambda_1\,\text{sen}\,\Lambda_2\cos\lambda_3\,. \end{aligned}$$

Applicando l'equazioni (6) agli elementi della terna *fondamentale* di

rette e di piani, che indicheremo con (xyz, XYZ), ed alla quale si riferiranno tutti gli altri elementi del sistema, si avrà

$$yz=\lambda_1\,,\ zx=\lambda_2\,,\ xy=\lambda_3\,;\qquad YZ=\Lambda_1\,,\ ZX=\Lambda_2\,,\ XY=\Lambda_3\,,$$

sicchè $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ non sono altra cosa che gli angoli compresi fra le rette, e fra i piani della terna fondamentale, e poichè questa può rappresentare una terna qualunque del sistema, le equazioni (3) e (4) esprimeranno le relazioni fondamentali fra le parti di una terna qualunque di rette e di piani.

Ponendo

$$\operatorname{sen}^2 xyz\ =1-\cos^2\lambda_1-\cos^2\lambda_2-\cos^2\lambda_3+2\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3\ ,$$
$$\operatorname{sen}^2 XYZ=1-\cos^2\Lambda_1-\cos^2\Lambda_2-\cos^2\Lambda_3+2\cos\Lambda_1\cos\Lambda_2\cos\Lambda_3\ ,$$

l'equazioni (7) del numero precedente, alle quali può darsi la forma

$$(7)\qquad \operatorname{sen} sS=s_1S_1\operatorname{sen} xX+s_2S_2\operatorname{sen} yY+s_3S_3\operatorname{sen} zZ\ ,$$

daranno le formole

$$(8)\qquad \begin{aligned}&\operatorname{sen} xX\operatorname{sen}\lambda_1=\operatorname{sen} yY\operatorname{sen}\lambda_2=\operatorname{sen} zZ\operatorname{sen}\lambda_3=\operatorname{sen} xyz\ ,\\&\operatorname{sen} Xx\operatorname{sen}\Lambda_1=\operatorname{sen} Yy\operatorname{sen}\Lambda_2=\operatorname{sen} Zz\operatorname{sen}\Lambda_3=\operatorname{sen} XYZ\ ,\end{aligned}$$

le quali completano il sistema delle relazioni fondamentali fra le parti di una terna di rette e di piani.

Dall'equazione (7) si trae

$$(9)\qquad \begin{aligned}&s_1=\frac{\operatorname{sen} sX}{\operatorname{sen} xX}\ ,\quad s_2=\frac{\operatorname{sen} sY}{\operatorname{sen} yY}\ ,\quad s_3=\frac{\operatorname{sen} sZ}{\operatorname{sen} zZ}\ ,\\&S_1=\frac{\operatorname{sen} Sx}{\operatorname{sen} Xx}\ ,\quad S_2=\frac{\operatorname{sen} Sy}{\operatorname{sen} Yy}\ ,\quad S_3=\frac{\operatorname{sen} Sz}{\operatorname{sen} Zz}\ ,\end{aligned}$$

formole le quali definiscono il significato geometrico delle coordinate di s e di S.

Se l'elemento S cui appartiene la coppia (s', s''), e l'elemento s cui appartiene la coppia (S', S''), sono determinati rispettivamente dall'equazioni

$$\Sigma_1 s_1+\Sigma_2 s_2+\Sigma_3 s_3=0\ ,\qquad \sigma_1 S_1+\sigma_2 S_2+\sigma_3 S_3=0\ ,$$

le coordinate di S e di s essendo date dalle formole

$$\frac{S_1}{\Sigma_1 \operatorname{sen}\lambda_1} = \frac{S_2}{\Sigma_2 \operatorname{sen}\lambda_2} = \frac{S_3}{\Sigma_3 \operatorname{sen}\lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{u(\Sigma_1 \operatorname{sen}\lambda_1, \Sigma_2 \operatorname{sen}\lambda_2, \Sigma_3 \operatorname{sen}\lambda_3)}},$$

$$\frac{s_1}{\sigma_1 \operatorname{sen}\Lambda_1} = \frac{s_2}{\sigma_2 \operatorname{sen}\Lambda_2} = \frac{s_3}{\sigma_3 \operatorname{sen}\Lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{U(\sigma_1 \operatorname{sen}\Lambda_1, \sigma_2 \operatorname{sen}\Lambda_2, \sigma_3 \operatorname{sen}\Lambda_3)}},$$

nelle quali si può supporre che Σ_i e σ_i abbiano i valori espressi dall'equazioni (5), si avrà

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} sS = \dfrac{(\Sigma_1 s_1 + \Sigma_2 s_2 + \Sigma_3 s_3) \operatorname{sen} xyz}{\sqrt{u(\Sigma_1 \operatorname{sen}\lambda_1, \Sigma_2 \operatorname{sen}\lambda_2, \Sigma_3 \operatorname{sen}\lambda_3)}}, \\ \operatorname{sen} Ss = \dfrac{(\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_3) \operatorname{sen} XYZ}{\sqrt{U(\sigma_1 \operatorname{sen}\Lambda_1, \sigma_2 \operatorname{sen}\Lambda_2, \sigma_3 \operatorname{sen}\Lambda_3)}}, \end{cases}$$

e quindi

$$(11) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} ss's'' = \operatorname{sen} sS \,.\, \operatorname{sen} s's'' = \begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ s'_1, & s'_2, & s'_3 \\ s''_1, & s''_2, & s''_3 \end{vmatrix} \operatorname{sen} xyz, \\ \operatorname{sen} SS'S'' = \operatorname{sen} Ss \,.\, \operatorname{sen} S'S'' = \begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ S'_1, & S'_2, & S'_3 \\ S''_1, & S''_2, & S''_3 \end{vmatrix} \operatorname{sen} XYZ. \end{cases}$$

Da quanto precede si fa manifesto che nel sistema di rette e di piani concorrenti in un punto, le quantità indicate nel numero 1 coi nomi di *potenze* delle coppie (s', s''), (S', S'') ed (s, S) non sono altra cosa che $\operatorname{sen} s's''$, $\operatorname{sen} S'S''$, e $\operatorname{sen} sS$; lo *potenze* poi della terna $(s's''s''', S'S''S''')$ sono espresse da $\frac{\operatorname{sen} s's''s'''}{\operatorname{sen} xyz}$, e $\frac{\operatorname{sen} S'S''S'''}{\operatorname{sen} XYZ}$.

Consideriamo ora il sistema dei punti e delle rette giacenti in un piano. La proprietà caratteristica dell'intervallo fra due elementi (s', s'') ed (S', S'') competerà evidentemente al segmento rettilineo $s's''$ terminato ai duo punti (s', s'') ed all'angolo $S'S''$ compreso fra le due rette (S', S''), supporremo adunque

$$\operatorname{Int.}(s's'') = s's'', \qquad \operatorname{Int.}(S'S'') = S'S''.$$

Due rette perpendicolari tra loro (ad intervallo cioè eguale al quadran-

te) essendo elementi coniugati armonici rispetto all'Assoluto, una terna di rette, coniugata rispetto all'Assoluto, avrà necessariamente una retta all'infinito, sicchè un punto qualunque e la retta all'infinito saranno elementi armonici l'uno dell'altro rispetto all'Assoluto. Segue da ciò che l'Assoluto del sistema di rette e di punti giacenti in un piano è una linea di 2ª classe e di 2° ordine ridotta ad una coppia di punti all'infinito, e ad una coppia di rette coincidenti con la retta all'infinito; ciascuno dei suddetti due punti all'infinito è caratterizzato dalla proprietà singolare che due rette qualunque perpendicolari tra loro condotte per esso sono anche tra loro coincidenti.

Prendiamo per le forme quadratiche u ed U che determinano l'Assoluto le espressioni

$$(12)\qquad \begin{aligned} u &= S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_2S_3\cos A_1+2S_3S_1\cos A_2+2S_1S_2\cos A_3\,,\\ U &= (s_1+s_2+s_3)^2\,, \end{aligned}$$

la seconda delle quali si deduce dall'attuale forma congiunta di u ponendo $\frac{s_i}{\operatorname{sen} A_i}$ in vece di s_i, ed osservando che per ridursi u ad una coppia di punti si ha la condizione

$$\delta = 1-\cos^2 A_1-\cos^2 A_2-\cos^2 A_3+2\cos A_1\cos A_2\cos A_3=0\,,$$

onde

$$(13)\qquad A_1+A_2+A_3=2\pi\,.$$

Siano λ_1, λ_2, λ_3 tre quantità definite dalle relazioni

$$(14)\qquad \frac{\lambda_1}{\operatorname{sen} A_1}=\frac{\lambda_2}{\operatorname{sen} A_2}=\frac{\lambda_3}{\operatorname{sen} A_3}=\frac{k}{\operatorname{sen} A_1\operatorname{sen} A_2\operatorname{sen} A_3}\,,$$

in cui k è la costante contenuta nelle formole (9) ed (11) del numero precedente (formole applicabili al caso attuale in cui si ha $\delta=0$), e sia l'altra costante K definita dalle relazioni

$$(14)\qquad \frac{\operatorname{sen} A_1}{\lambda_1}=\frac{\operatorname{sen} A_2}{\lambda_2}=\frac{\operatorname{sen} A_3}{\lambda_3}=\frac{K}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\,.$$

Supponendo che i valori assoluti delle coordinate (s_1, s_2, s_3) ed (S_1, S_2, S_3) di un punto s e di una retta S rendano le forme quadratiche U ed u

eguali all'unità, e ritenendo per Σ_1 e σ_1 le espressioni (5), le formole (9) e (10) del numero precedente daranno

$$(s's'')^2 = u(\Sigma_1\lambda_1, \Sigma_2\lambda_2, \Sigma_3\lambda_3) = \Sigma_1^2\lambda_1^2 + \Sigma_2^2\lambda_2^2 + \Sigma_3^2\lambda_3^2$$
$$+ 2\Sigma_2\Sigma_3\lambda_2\lambda_3\cos\Lambda_1 + 2\Sigma_3\Sigma_1\lambda_3\lambda_1\cos\Lambda_2 + 2\Sigma_1\Sigma_2\lambda_1\lambda_2\cos\Lambda_3 ,$$

$$(15)\quad \cos S'S'' = S'_1S''_1 + S'_2S''_2 + S'_3S''_3 + (S'_2S''_3 + S'_3S''_2)\cos\Lambda_1 + (S'_3S''_1 + S'_1S''_3)\cos\Lambda_2$$
$$+ (S'_1S''_2 + S'_2S''_1)\cos\Lambda_3 ,$$
$$\operatorname{sen} S'S'' = (S'_2S''_3 - S'_3S''_2)\operatorname{sen}\Lambda_1 + (S'_3S''_1 - S'_1S''_3)\operatorname{sen}\Lambda_2 + (S'_1S''_2 - S'_2S''_1)\operatorname{sen}\Lambda_3 .$$

Applicando l'equazioni (15) agli elementi della terna *fondamentale* (xyz, XYZ) di punti e di rette, alla quale si riferiscono tutti gli altri elementi del sistema, verrà

$$yz = \lambda_1 ,\quad zx = \lambda_2 ,\quad xy = \lambda_3 ;\qquad YZ = \Lambda_1 ,\quad ZX = \Lambda_2 ,\quad XY = \Lambda_3 ,$$

sicchè $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ non sono altra cosa che i lati e gli angoli della terna fondamentale, laonde le equazioni (13) e (14) esprimeranno le relazioni fondamentali fra le parti di una terna qualunque di punti e di rette.

Ponendo $k = (XYZ)$ e $K = (xyz)$, per l'equazione (11) del numero precedente (che dà la distanza sS del punto s dalla retta S) alla quale può darsi la forma

$$(16)\qquad Ss = S_1s_1 . Xx + S_2s_2 . Yy + S_3s_3 . Zz ,$$

si avranno le formole

$$(17)\qquad \begin{aligned} Xx . \operatorname{sen}\Lambda_1 &= Yy . \operatorname{sen}\Lambda_2 = Zz . \operatorname{sen}\Lambda_3 = (XYZ) , \\ xX . \lambda_1 &= yY . \lambda_2 = zZ . \lambda_3 = (xyz) , \end{aligned}$$

le quali completano il sistema delle relazioni fondamentali fra le parti di una terna di punti e di rette.

Dall'equazione (16) si trae

$$(18)\qquad \begin{aligned} s_1 &= \frac{sX}{xX} ,\quad s_2 = \frac{sY}{yY} ,\quad s_3 = \frac{sZ}{zZ} , \\ S_1 &= \frac{Sx}{Xx} ,\quad S_2 = \frac{Sy}{Yy} ,\quad S_3 = \frac{Sz}{Zz} , \end{aligned}$$

formole le quali definiscono il significato geometrico delle coordinate di s e di S.

Se l'elemento S cui appartiene la coppia (s', s'') e l'elemento s cui appartiene la coppia (S', S'') sono determinati rispettivamente dall'equazioni

$$\Sigma_1 s_1 + \Sigma_2 s_2 + \Sigma_3 s_3 = 0 , \qquad \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_3 = 0 ,$$

le coordinate di S e di s essendo date dalle formole

$$\frac{S_1}{\Sigma_1 \lambda_1} = \frac{S_2}{\Sigma_2 \lambda_2} = \frac{S_3}{\Sigma_3 \lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{u(\Sigma_1 \lambda_1 , \Sigma_2 \lambda_2 , \Sigma_3 \lambda_3)}} ,$$

$$\frac{s_1}{\sigma_1 \operatorname{sen} A_1} = \frac{s_2}{\sigma_2 \operatorname{sen} A_2} = \frac{s_3}{\sigma_3 \operatorname{sen} A_3} = \frac{1}{\sigma_1 \operatorname{sen} A_1 + \sigma_2 \operatorname{sen} A_2 + \sigma_3 \operatorname{sen} A_3} ,$$

nelle quali si può supporre che Σ_i e σ_i abbiano i valori espressi dall'equazioni (5), si avrà

(19)
$$sS = \frac{(\Sigma_1 s_1 + \Sigma_2 s_2 + \Sigma_3 s_3)(xyz)}{\sqrt{u(\Sigma_1 \lambda_1 , \Sigma_2 \lambda_2 , \Sigma_3 \lambda_3)}} ,$$
$$Ss = \frac{(\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_3)(XYZ)}{\sigma_1 \operatorname{sen} A_1 + \sigma_2 \operatorname{sen} A_2 + \sigma_3 \operatorname{sen} A_3} ,$$

e quindi

(20)
$$(ss's'') = sS \,.\, s's'' = \begin{vmatrix} s_1 , & s_2 , & s_3 \\ s'_1 , & s'_2 , & s'_3 \\ s''_1 , & s''_2 , & s''_3 \end{vmatrix} (xyz) ,$$
$$(SS'S'') = Ss \,.\, \operatorname{sen} S'S'' = \begin{vmatrix} S_1 , & S_2 , & S_3 \\ S'_1 , & S'_2 , & S'_3 \\ S''_1 , & S''_2 , & S''_3 \end{vmatrix} (XYZ) .$$

Nel sistema di punti e di rette giacenti in un piano, le *potenze* delle coppie (s', s''), (S', S''), ed (s, S) sono $s's''$, $\operatorname{sen} S'S''$ ed sS, e le potenze della terna $(s's''s''', S'S''S''')$ sono espresse da $\frac{(s's''s''')}{(xyz)}$ ed $\frac{(S'S''S''')}{(XYZ)}$.
